Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 1

Séance 12

Dérivée seconde approchée par des différences finies centrées

Ordre de précision

Table des matières

I. Dérivées d'ordre supérieur

On peut itérer les relations vues précédemment pour tenter d'approcher $f''(x_n)$ avec $n \in [0, N]$:

$$f_d''(x_n) \approx \frac{f'(x_n + h) - f'(x_n)}{h}$$
$$f_g''(x_n) \approx \frac{f'(x_n) - f'(x_n - h)}{h}$$
$$f_c''(x_n) \approx \frac{f'(x_n + h) - f'(x_n - h)}{2h}$$

Mais chacune des dérivées premières des membres de droite de ces formules peuvent être approchée par l'une de 3 relations que nous avions vues, ce qui nous donne 27 relations a priori différentes pour approcher $f''(x_n)$.

Remarque :
Si l'on décide d'utiliser la formule pour $f_c''(x_n)$ en utilisant les dérivées premières centrées on obtient :

$$f'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$
$$f'\left(x_n - \frac{h}{2}\right) \approx \frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h}$$

Ce qui donne :

$$f_c''(x_n) \approx \frac{f(x_n + h) - 2f(x_n) + f(x_n - h)}{h^2}$$

On privilégiera cette dernière approximation qui utilise plus de points de la courbe.

II. Ordre de précision

On va écrire le développement de Taylor à un ordre suffisant afin de faire apparaître l'ordre optimal de la différence finie.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}r(h) \quad (1)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}r(h) \quad (2)$$

Pour les différences finies décentrées, on obtient directement à partir de ces formules :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^4}{5!}r(h)$$
$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^4}{5!}r(h)$$

On a obtenu que ces différences finies sont d'ordre 1 si $f''(x) \neq 0$ et d'ordre 2 au moins sinon.

Pour la différence finie centrée :
On soustrait nos deux égalités (1) et (2) :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{2h^5}{5!}r(h)$$

Qui nous donne :

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{5!}r(h)$$

On a obtenu que la différence finie centrée est d'ordre 2 si $f^{(3)}(x) \neq 0$ et d'ordre 4 au moins sinon.

Pour $f''(x)$ nous ferons la même chose, mais en poussant un cran au-dessus notre développement de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!}r(h)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!}r(h)$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient :

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{2h^6}{6!}r(h)$$

Ainsi :

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{2h^2}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{2h^4}{6!}r(h)$$

On voit que cette différence finie est d'ordre 2 si $f^{(4)}(x) \neq 0$ et d'ordre 4 au moins sinon.

III. Exercice

Nous avons vu qu'avec notre formule de différence finie centrée, nous obtenions une approximation d'ordre 2 pour $f'(x)$.
En prenant en compte plus de points, il est possible d'augmenter la précision de notre calcul.

En vous intéressant à $f(x+h)$, $f(x-h)$ mais aussi à $f(x+2h)$ et $f(x-2h)$ et à l'aide d'une combinaison linéaire pertinente, obtenez une approximation d'ordre 4 pour $f'(x)$.

On rappelle la formule de Taylor-Young :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + o(h^5)$$